220 - Équations différentielles $X' = f(X,t)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

1 Etude générale des ED

1.1 Existence et unicité de solutions

On se place sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et un ouvert de U $\mathbb{R}^n$. On se donne $F : I \times U \to \mathbb{R}^n$ continue.

1.1 Définition. Solution— Une solution de l'équation différentielle associée à F est un couple (Y, J) où J est un intervalle inclus dans I et $Y \in C^1(J, U)$ avec $\forall t \in J$, $Y'(t) = F(t, Y(t))$.

1.2 Définition. Solution maximale— Une solution locale Y est dite maximale si il n'existe aucune solution de l'ED qui prolonge Y.

Rem : On peut aussi définir un système d'équas diff d'ordre supérieur mais on peut se ramener à un système d'ordre 1 par des matrices.

1.3 Note. *Equation autonome— On peut aussi se donner $G : U \to \mathbb{R}^n$ $F : (t, x) \mapsto G(x)$. On dit alors que l'ED est autonome.*

1.4 Définition. Problème de Cauchy— Un problème de Cauchy est défini par la donnée $(t_0, x_0) \in I \times U$. Une solution du pb de Cauchy est une solution (Y,J) tq $t_0 \in J$ et $Y(t_0) = x_0$.

Def : Localement Lipschitz en la seconde variable

1.5 Théorème. *Cauchy-Lipschitz— Soit (t_0, x_0) un problème de Cauchy de l'ED. Si F est localement Lipschitz en sa seconde variable, alors le problème de Cauchy possède une solution locale.*
De plus, pour f et g solutions définies sur J_1 et J_2, $f \equiv g$ sur $J_1 \cup J_2$.

1.6 Corollaire. *Sous les conditions du théorème, il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy.*

Ex : $F(t, x) =$ est bien continue et loc Lip en espace
Si F est C^1, elle est loc Lip en espace.
$y' = 3|y|^{\frac{2}{3}}$ - contre-ex

exemples non-linéaires

1.2 Passage du local au global

Zéros isolés : En dim 2, pour f solution de $f(t_0) = x_0$ et g sol de $g(t_0) = x_1$, les y tels que $f(y) = g(y)$ sont isolés.

1.7 Théorème. *Sortie de tout compact— Soit (t_0, x_0) un problème de Cauchy avec F loc Lip en espace, et Y la solution maximale du problème de Cauchy définie sur J. On pose $I =]a, b[$ et $J =]c, d[$.*
Si $d < b$ (ou $a < c$) alors pour tout K compact de U, il existe un $\alpha \in J$ tq $Y(]\alpha, d[) \cup K = \emptyset$.

1.8 Exemple. — *$Y' = F(Y)$ avec $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bornée.*
Si une sol maximale n'était pas définie sur R tout entier, on montre que Y est bornée au bord de son domaine de def, contradiction.

Lemme de Gronwall

Appli : Pour y"+qy=0, si q est C^1, croissante, strict positive, sur $\mathbb{R}^+$, alors les solutions de l'ED sont bornées sur R^+.
Si $F : R \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est globalement Lipschitz en espace, alors les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$.
Corollaire : Cauchy-linéaire (démontré avec la sortie de tout compact + Gronwall)
Wronskien
ex d'utilisation

2 Quelques ED particulières

2.1 Résolution des ED linéaires en dim 1 et 2

Resolution de l'équation homogène
Si l'on connaît une solution, on en trouve une autre indépendante par abaissement de l'ordre
Résolution de $Y'(t) = A(t).Y(t) + B(t)$ par l'EHA + variation des constantes
cas en dim 1
Cas des coefficients constants : forme de la solution en fonction de la décompo du poly caractéristique en poly irred

Pour $y" + p(t).y' + q(t)y = 0$, on peut se ramener à p=0 en posant y=z.x, avec $2z' + p.z = 0$.
On a alors $z.x" + (2z' + pz)x' + (z" + pz' + qz)x = 0$.
$y" + qy = 0$ a un wronskien constant
$y" + qy = 0 \Rightarrow \int_0^x y"(t)dt = -\int_0^x q(t).y(t)dt$ (infos sur y')
Si q est dans $L^1(R^+)$ alors l'ED a des solutions non bornées
Si q est strictement négative, les solutions non-nulles sont non-bornées car y" est du même signe que y.
Si q est positive, y" est de signe opposé à y, donc y' est monotone sur les segments où y est de signe constant.
Pour f solution non-nulle de l'ED, f change de signe à chaque zéro car sinon f est la fonction nulle.
Pour f et g solutions lin indépendantes de l'ED, entre deux zéros de f on a un zéro de g. (wronskien constant + regarder le signe de f' et g')

Dev 1 : Hill-Mathieu

2.1 Théorème. *Equation de Hill-Mathieu— Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^0, π-périodique, et paire. On considère l'ED $y" + qy = 0$.*
Soit W l'espace des sol complexes de l'ED, et $A : f \in W \mapsto (x \mapsto f(x+\pi)) \in W$.
Alors : $|Tr(A)| < 2 \Leftrightarrow$ Toutes les sol non-nulles sont bornées
$|Tr(A)| = 2 \Rightarrow$ L'ED possède une solution non-nulle bornée.
$|Tr(A)| > 2 \Leftrightarrow$ Toutes les sol non-nulles sont non-bornées.

2.2 Techniques pour certaines classes d'équations

Equation de Bernouilli $y' = a(t).y + b(t).y^\alpha$
Equation de Ricatti

2.3 Equations possédant une solution DSE

Dev 2 : Bessel

2.2 Théorème. *Solution DSE de l'équation de Bessel— On considère l'ED : $xy" + y' + xy = 0$ sur R_+^*.*
Il existe une unique sol f analytique qui admette un prolongement analytique en 0, et tq f(0)=1.
Pour tout g solution lin indép de f, g est non-bornée au voisinage de 0^+.

De plus, $f(x) = \int_0^\pi cos(xsin(t))dt$.

3 Stabilité de points critiques, systèmes autonomes

3.1 Stabilité des équilibres

Z-Q :
Rouvière : Lyapunov
Rouvière : Contre-ex de Lyapunov
FGN analyse 4 : Equa de Van der Pol

3.2 Etude qualitative de systèmes linéaires à coeffs constants en dim 2

Demailly : Dessins
Zuily-Queffelec : Etude des trajectoires

Références : Gourdon, Zuily-Queffélec, Rouvière, Demailly
Développements : Hill-Mathieu (Zuily), Bessel (FGN, Analyse 4)